



Congresso Internacional
de Administração
ADM 2021

24 a 28
de outubro
Ponta Grossa - Paraná - Brasil

**SOBREVIVÊNCIA DAS ORGANIZAÇÕES
EM TEMPOS INCERTOS:**

O papel dos gestores e do ambiente externo
no sucesso e no fracasso organizacional.

GESTÃO DE INVESTIMENTOS BASEADA EM OBJETIVOS: UMA ANÁLISE SOBRE A ESTIMATIVA DE RETORNOS

GOALS-BASED WEALTH MANAGEMENT: AN ANALYSIS ON RETURNS ESTIMATION

ÁREA TEMÁTICA: FINANÇAS

Luis Paulo de Souza Ferreira, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Brasil, luispsferreira@ufpr.br

Resumo

A gestão de investimentos baseada em objetivos é a gestão do portfólio de investimentos pessoais com o intuito de maximizar a probabilidade de atingir objetivos financeiros. Essa abordagem auxilia os investidores a reduzirem os impactos dos vieses cognitivos nas suas decisões financeiras, além de facilitar o entendimento de termos financeiros por meio de uma linguagem clara e de fácil entendimento. O presente trabalho realiza uma aplicação prática da metodologia baseada em objetivos. Em especial, analisa-se por meio de simulações os impactos das estimativas de retornos esperados nos valores da riqueza acumulada ao longo do horizonte de investimento e na probabilidade de se atingir o objetivo financeiro. Os resultados obtidos corroboram os benefícios da gestão de investimentos baseada em objetivos. Além disso, destaca-se que os métodos de estimativa dos retornos esperados resultam em diferentes composições de carteiras recomendadas e, conseqüentemente, tem impacto significativo no montante final atingido.

Palavras-chave: otimização de portfólios de investimentos; gestão de investimentos baseada em objetivos; teoria do portfólio comportamental.

Abstract

The goals-based wealth management is the management of personal investment portfolios with the aim of maximizing the probability of achieving financial goals. This approach assists investors to reduce the impacts of cognitive biases on their financial decisions, in addition to improving the understanding of financial terms through a clear and plain language. This article conducts an application of the goals-based methodology. It evaluates through simulations the impacts of expected returns estimation on the accumulated wealth and on the probability of achieving the financial goal over the investment horizon. The results corroborate the benefits of objective-based investment management. In addition, it suggests that the estimation methods for expected returns result in different compositions of recommended portfolios and, consequently, have a significant impact on the final wealth achieved.

Keywords: *investment portfolio optimization; goals-based wealth management; behavioral portfolio theory.*

1. INTRODUÇÃO

O planejamento financeiro individual ou familiar ocorre dentro de contextos particulares de maneira inter-relacionada com diversos outros planejamentos, como planos profissionais, projetos pessoais, metas de consumo e eventuais aspirações subjetivas. Nesses contextos particulares, os indivíduos apresentam padrões de comportamento nos quais a riqueza possui diversas formas e a aplicação da teoria de portfólio clássica encontra dificuldades, conforme indicado por Nevins (2004), Statman (2008), Brunel (2011) e Chang, Young e Diaz (2018).

Conforme conceituado por Das, Ostrov et al. (2018), a gestão de investimentos baseada em objetivos (*goals-based wealth management - GBWM*) é a gestão do portfólio de investimentos pessoais com o intuito de se atingir objetivos financeiros. Essa metodologia de investimentos é uma implementação dos conceitos de finanças comportamentais apresentadas por Shefrin e Statman (2000) na Teoria do Portfólio Comportamental em consonância com a Teoria das Contabilidades Mentais propostas por Thaler (1999).

Segundo Brunel (2011), a definição de um nível aceitável de variância para um determinado retorno esperado não é uma tarefa trivial e não ocorre de forma intuitiva a partir das aspirações individuais. À exemplo disso, observa-se no “Raio X do Investidor Brasileiro, 4ª edição” elaborado pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA, 2021) que 29,2% dos entrevistados alocam recursos na caderneta de poupança enquanto somente 5,0% investem em títulos públicos.

Ou seja, mesmo a caderneta de poupança tendo um retorno atrelado à taxa básica de juros e, portanto, um nível de risco similar aos títulos públicos atrelados à essa mesma taxa básica, ainda assim ela atrai mais investidores. Ademais, a publicação mostra que investidores brasileiros efetuam suas aplicações almejando objetivos específicos, sendo que 26% dos entrevistados investem para comprar um imóvel, 10% almejam a aquisição de um automóvel, 10% pretendem realizar uma viagem e 5% aspiram guardar dinheiro para empreender (ANBIMA, 2021).

Dentre os benefícios da metodologia de investimentos por objetivos, Das, Ostrov et al. (2020) destacam o impacto positivo na comunicação entre investidores, instituições financeiras e profissionais do mercado. Isso ocorre devido a aconselhamentos individualizados com uma linguagem mais clara e compreensível para os investidores.

Essa comunicação centrada no cliente revela-se importante, uma vez que, segundo o “Raio X do Investidor, 4ª edição” (ANBIMA, 2021), 60,5% dos investidores brasileiros não sabem identificar o principal fator aplicado na escolha dos seus investimentos, ainda que 60,1% deles busquem aconselhamentos com gerentes de bancos ou assessores de investimentos.

Diante deste contexto, o presente trabalho realiza uma aplicação prática da metodologia baseada em objetivos estruturada por Das et al. (2020). Em especial, analisa-se os impactos das estimativas de retornos esperados nos valores da riqueza acumulada ao longo do horizonte de investimento e na probabilidade de se atingir o objetivo financeiro, bem como nas composições das carteiras recomendadas a cada instante de tempo.

Inicialmente, apresenta-se uma revisão sobre a Teoria do Portfólio e sobre os aspectos comportamentais dos investidores que instigaram o surgimento da Teoria do Portfólio Comportamental. Na sequência, descreve-se a modelagem matemática da gestão de investimentos baseada em objetivos e também os métodos de cálculo de retorno esperado.

Em seguida, aos modelos matemáticos são implementados em algoritmo utilizando linguagem de programação Python. Por fim, realiza-se testes utilizando séries temporais de retornos históricos (*backtesting*) para dois objetivos financeiros, alterando-se os parâmetros: prazo de análise da série histórica antes da alocação, método de cálculo de retorno esperado, prazo do investimento, montante investido inicialmente e montante final almejado.

Conforme os resultados apresentados, a forma de se estimar os retornos esperados tem impacto significativo nas composições das carteiras recomendadas a cada período e, conseqüentemente, no valor final obtido. Além disso, nota-se que, ao longo do período de investimento, a metodologia baseada em objetivos realiza uma gestão de risco do portfólio (volatilidade) conforme a riqueza atingida se aproxima do valor almejado.

2. REVISÃO DE LITERATURA

A Teoria do Portfólio, proposta inicialmente por Markowitz (1952), se tornou a referência fundamental para a gestão de carteiras de investimentos. Conforme essa teoria, a alocação de recursos financeiros em um portfólio de investimentos tem como objetivo identificar um conjunto de ativos que otimize a relação entre risco e retorno ao longo do tempo.

A escolha desse conjunto de ativos se fundamenta nos conceitos estatísticos de covariância e correlação entre os retornos históricos dos ativos. Uma carteira eficiente deve maximizar o retorno esperado para um determinado nível de risco ou minimizar o risco do conjunto para um retorno esperado.

O retorno da carteira é calculado por meio da média ponderada dos retornos esperados dos títulos que a compõem, entretanto, o risco da carteira depende não somente da variância dos retornos dos ativos individualmente, mas também das correlações entre todos os ativos (Markowitz, 1952). Dessa forma, covariâncias positivas entre os ativos aumentam a variância da carteira, enquanto covariâncias negativas reduzem a variância total, ou seja, reduzem o risco do portfólio.

A partir dessas considerações, várias carteiras eficientes podem ser elaboradas para perfis de risco distintos, caracterizando assim o que Markowitz (1952) denominou de fronteira eficiente. Diversos trabalhos complementaram significativamente a Teoria do Portfólio, como a descrição detalhada da racionalidade dos investidores apresentada por Miller e Modigliani (1961), o modelo de precificação *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), estruturado por Sharpe (1964) e a Hipótese do Mercado Eficiente de Fama (1965).

Por fim, todos esses estudos levaram à Teoria Moderna das Finanças, que, conforme resumido por Statman (2008), se baseia em quatro pilares: os investidores são racionais e avessos ao risco; os mercados são eficientes; os portfólios devem ser criados com base na otimização da relação risco/retorno; e os retornos esperados são definidos em função somente do risco.

Logo, a forma clássica de gestão de portfólios considera que as pessoas compreendem a natureza do dilema entre risco e retorno e sabem como resolver esse problema utilizando informações apropriadas. Porém, investidores estão sujeitos a uma série de fatores que comprometem a criação de carteiras eficientes, como custos transacionais, acesso a informações confiáveis nos momentos corretos, impostos e, sobretudo, fatores emocionais e comportamentais, que são o foco do presente trabalho.

Nesse sentido, tem-se, por exemplo, o “fenômeno de manada” detalhado por Kent, Hirshleifer e Hong Teoh (2002), que indica que indivíduos seguem emocionalmente os movimentos de mercado em momentos de estresse, como de crises financeiras. Outro componente emocional

sugerido pela Teoria do Prospecto de Kahneman e Tversky (1979) é o fato de investidores não se comportarem racionalmente ao valorizarem ganhos e perdas de maneira diferente.

De forma complementar, Shefrin e Statman (1985) conceituaram o “efeito disposição” e argumentaram que a relutância em vender ativos não lucrativos surge da combinação dos vieses cognitivos de enquadramento defeituoso (*faulty framing*) e viés da retrospectiva (*hindsight bias*) com o sentimento de arrependimento.

Além disso, Das, Markowitz e Statman (2010) sugerem que uma investidora pode ser altamente avessa ao risco para um investimento que visa a sua aposentadoria, porém mais tolerante ao risco para uma meta de educação universitária e até mesmo buscar assumir mais risco para uma meta de ficar rica. Por essa razão, Das et al. (2010) afirmam que, apesar de lógica e prática, a Teoria do Portfólio não auxilia os investidores a definirem o melhor conjunto de ativos para se atingir uma meta financeira em particular.

Adicionalmente, Das et al. (2010) declaram que a criação de portfólios para objetivos específicos é um dos pontos centrais da Teoria do Portfólio Comportamental de Shefrin e Statman (2000), segundo a qual os investidores não consideram o seu portfólio como um todo. Em vez disso, eles consideram seus portfólios como coleções de subcarteiras associadas a objetivos e determinam por meio de contabilidades mentais diferentes preferências de risco e retornos para cada uma delas, conforme proposto também por Thaler (1999).

Desse modo, Statman (2008) propõe a figura do “investidor normal” conforme a Teoria das Finanças Comportamentais em oposição ao “investidor racional” da Teoria Moderna das Finanças. Esses investidores normais, afetados por vieses e emoções, podem preferir outras formas de riqueza, como status social, e estão dispostos a sacrificar riqueza monetária por isso.

Investidores normais, conforme Statman (2008), se preocupam com o retorno esperado de cada subportfólio e medem o risco não pela variância, mas sim pela probabilidade de não se atingir um nível mínimo de retorno para cada subportfólio. Nessa perspectiva, Das et al. (2010) apresentam que a criação de portfólios de investimentos baseados em objetivos elaborados por meio de contabilidades mentais continua gerando soluções ótimas devido à equivalência matemática com a solução clássica de Markowitz (1952), porém alterando-se o conceito de risco.

A abordagem de criação de portfólios para objetivos financeiros é aprofundada por Das, Ostrov e Radhakrishnan (2018) com uma melhor estruturação da gestão de investimentos baseada em objetivos (*goals-based wealth management*). Segundo estes autores, a metodologia *goals-based* deve incorporar tanto a visão tradicional do risco como desvio-padrão, quanto a visão do risco como a probabilidade de não se atingir um objetivo financeiro.

Dessa maneira, cada combinação risco e retorno da fronteira eficiente corresponde a um portfólio com uma probabilidade de atingir um objetivo específico. Uma consequência importante da junção dessas duas noções de risco é que um portfólio com menor desvio-padrão não necessariamente resulta em um portfólio mais seguro sob o ponto de vista da conquista de um objetivo.

Na sequência, Das et al. (2020) propõem um modelo de gestão de investimentos baseada em objetivos que, além de otimizar a relação entre risco e retorno, também engloba aportes ou retiradas periódicos de valores. Ademais, o modelo dinâmico também considera rebalanceamentos da carteira em simultâneo com os aportes.

Em sua essência, a metodologia de gestão de investimentos baseada em objetivo proposta por Das et al. (2020) se baseia na definição de um ponto na fronteira eficiente a ser investido no instante inicial de forma a maximizar a probabilidade de atingir um objetivo ao longo do prazo de investimento. A combinação de ativos e seus respectivos pesos que correspondem a esse ponto inicial específico é determinada por meio do modelo de otimização clássico apresentado por Markowitz (1952).

Os ativos que compõem a fronteira eficiente podem ser selecionados com diversos critérios. Segundo Das et al. (2018), alguns assessores de investimentos preferem trabalhar com um pequeno número de ativos, enquanto outros analisam um grande universo de ativos. Da mesma forma, alguns assessores estimam retornos esperados, desvios-padrão e correlações por meio de dados históricos enquanto outros combinam dados históricos com projeções.

Nos resultados apresentados por Das et al. (2020), os autores utilizam os dados históricos de três fundos de índice americanos no período de 20 anos entre Janeiro de 1998 e Dezembro de 2017. Os fundos escolhidos foram: *Vanguard Total Bond Market II Index Fund Investor Shares* (VTBIX), *Vanguard Total International Stock Index Fund Investor Shares* (VGTSX) e *Vanguard Total Stock Market Index Fund Investor Shares* (VTSMX).

O fundo VTBIX é composto por obrigações (títulos de dívida) de médio prazo de grandes empresas e do governo americano, sendo assim um representante de renda fixa americana. Já o fundo VGTSX possui em sua composição ações de grandes empresas internacionais (fora dos Estados Unidos) incluindo países emergentes e países desenvolvidos. Por fim, o fundo VTSMX é composto por ações de grandes empresas americanas (*Large Cap Blend*).

Das et al. (2020) estimam os retornos esperados dos fundos pelas médias aritméticas dos retornos históricos anuais de cada ativo. Porém, os autores escolhem essa forma de estimativa apenas por motivos de ilustração, sem dar diretrizes claras sobre como calcular retornos esperados.

2.1 Gestão de Investimentos Baseada em Objetivos

Em um dos trabalhos iniciais que estruturam a GBWM, Das, Markowitz et al. (2010) exploram a aplicação de contabilidades mentais para a separação de carteiras de investimentos em subportfólios criados para objetivos específicos de um investidor. Os autores apresentam um modelo para a criação de portfólios de investimentos para um determinado objetivo e mostram que os resultados obtidos são consistentes com as carteiras eficientes de Markowitz (1952).

Posteriormente, Das et al. (2018), expandem o modelo de contabilidades mentais elaborado por Das et al. (2010) e estruturam um modelo de GBWM mais robusto e focado na experiência do investidor e na sua comunicação com consultores financeiros. Esse modelo, descrito futuramente como modelo estático por Das et al. (2020), não engloba movimentações

financeiras como aportes ou retiradas e rebalanceamento de carteira ao longo do período de investimento.

Das et al. (2020) propõem um modelo dinâmico de GBWM que, além de otimizar a relação risco/retorno, também engloba aportes ou retiradas periódicos de valores e até mesmo a insolvência, ou seja, a perda de todo o montante investido, como em casos de saques de uma aposentadoria durante um longo período. Além disso, juntamente com os aportes (ou retiradas) periódicos, o modelo dinâmico também considera rebalanceamentos da carteira, podendo ser anuais ou com frequências maiores, como semestrais, bimestrais ou até mesmo mensais.

O modelo dinâmico de Das et al. (2020) estabelece pontos na fronteira eficiente ao longo de um prazo de investimento T que maximizem a probabilidade de atingir um montante financeiro G , conforme a função objetivo apresentada na Equação 2.1:

$$\max_{A(0), A(1), \dots, A(T-1)} \text{Prob}[W(T) \geq G], \quad (2.1)$$

onde: $W(T)$ é valor final da carteira de investimentos; $A(t)$ são as alocações possíveis dentre os ativos disponíveis para o investidor em cada instante de tempo “ t ” dentro do intervalo discreto entre 0 e $T - 1$.

Dentre os pontos principais do modelo dinâmico de gestão de investimentos estruturado por Das et al. (2020), destaca-se que o conjunto de carteiras disponíveis para alocação a cada instante, $A(t)$, podem ou não estar na fronteira eficiente. Dessa maneira, uma equipe de análise pode estabelecer um conjunto de ativos desejados e uma equipe de alocação pode ajustar dinamicamente os portfólios de maneira a torná-los eficientes.

A modelagem da Fronteira Eficiente estruturada por Das et al. (2020) relaciona a volatilidade, σ , e o retorno esperado, μ , de uma carteira composta por n ativos conforme a Equação 2.2, que delimita uma curva sobre o plano risco-retorno:

$$\sigma = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c}, \quad (2.2)$$

sendo as constantes a , b e c definidas pelo vetor dos retornos esperados, m , pelo vetor unitário, o , e pela matriz de covariância (modelo de risco), Σ de dimensões $n \times n$ da seguinte maneira: $a = h^T \Sigma h$; $b = 2g^T \Sigma h$; $c = g^T \Sigma g$.

Os vetores g e h são definidos por: $g = \frac{l\Sigma^{-1}o - k\Sigma^{-1}m}{lp - k^2}$; $h = \frac{p\Sigma^{-1}m - k\Sigma^{-1}o}{lp - k^2}$.

E os escalares k , l e p calculados da seguinte forma: $k = m^T \Sigma^{-1}o$; $l = m^T \Sigma^{-1}m$; $p = o^T \Sigma^{-1}o$.

É importante ressaltar que Das et al. (2020), utilizam a matriz de covariância amostral construída com base nos retornos históricos dos três ativos analisados. Entretanto, Ledoit e Wolf (2004), assim como de Nard (2020) afirmam que, quando o número de ativos se torna muito grande em comparação com a quantidade de observações de retornos históricos, a matriz de covariância amostral é significativamente afetada por erros de estimação. Nesses casos, recomenda-se o uso de um fator de redução (*shrinkage estimator*) na matriz de covariância.

Os ativos que compõem a fronteira eficiente podem ser selecionados com diversos critérios adotados pelos assessores financeiros. Segundo Das et al. (2018), alguns assessores preferem

trabalhar com um pequeno número de ativos, enquanto outros analisam um grande universo de ativos. Da mesma forma, alguns estimam retornos esperados, desvios-padrão, correlações por meio de dados históricos enquanto outros combinam dados históricos com projeções.

Uma vez construída a fronteira de eficiência, deve-se selecionar os pontos que satisfaçam ao objetivo financeiro do investidor. Ou seja, pontos que estejam na fronteira eficiente e que possibilitem o crescimento da riqueza inicial $W(0)$ ao longo do tempo até atingir no mínimo uma riqueza final $W(T)$ com uma probabilidade desejada. Dessa forma, o modelo dinâmico de GBWM depende tanto do horizonte de tempo quanto do estado da riqueza em cada instante.

No tempo inicial $t = 0$, há apenas um estado de riqueza possível, que é o montante $W(0)$ alocado inicialmente. Para estimar a evolução dessa riqueza inicial ao longo dos instantes subsequentes, Das et al. (2020) empregam o modelo estocástico do Movimento Browniano Geométrico, apresentado na Equação 2.3, considerando que a variável aleatória normal padrão Z somente assume valores dentro do intervalo $[-3,3]$.

$$\tilde{W}(t) = W(0)e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})ht + \sigma\sqrt{ht}Z]} \quad (2.3)$$

Portanto, a estimativa da riqueza mínima a cada instante \tilde{W}_{min} é obtida considerando-se que a variável aleatória, Z , assume o seu valor mínimo -3 ; o retorno esperado possui o valor mínimo μ_{min} ; e a volatilidade da carteira (risco) é a maior possível, σ_{max} (obtida ao substituir $\mu = \mu_{max}$ Equação 2.2, que modela a Fronteira Eficiente).

Já a riqueza máxima \tilde{W}_{max} é obtida atribuindo-se o valor máximo à variável aleatória, $Z = 3$; o valor máximo ao retorno esperado $\mu = \mu_{max}$; e o valor máximo também para a volatilidade da carteira, $\sigma = \sigma_{max}$.

Adicionalmente, Das et al. (2020) consideram fluxos periódicos de capital $C(t)$, de modo que, quando $C(t) > 0$, tem-se um aporte na carteira e quando $C(t) < 0$, tem-se uma retirada. Os fluxos e rebalanceamentos são determinados em $t = 0$ e, portanto, são assumidos como um pré-compromisso do investidor e também como uma variável de entrada do modelo.

A periodicidade dos fluxos e rebalanceamentos é definida por um passo de tempo $0 \leq h \leq 1$ no intervalo de tempo discreto, de forma que o horizonte de um objetivo é definido por N períodos de duração h . Ou seja, o tempo varia de maneira discreta conforme a série $[0, h, 2h, \dots, Nh = T]$. O valor comumente usado para o passo de tempo é $h = 1$, que representa uma periodicidade anual.

Desse modo, levando-se em consideração não somente a riqueza inicial, mas também os aportes e rebalanceamentos periódicos, tem-se a Equação 2.4, que estima os valores de mínimos de riqueza \tilde{W}_{min} para cada instante de tempo discreto:

$$\tilde{W}_{min}(t) = \min_{\tau \in \{0, 1, 2, \dots, T\}} [W(0)e^{[(\mu_{min} - \frac{\sigma_{max}^2}{2})ht - 3\sigma_{max}\sqrt{ht}]} + \sum_{t=0}^{\tau} C(t)e^{[(\mu_{min} - \frac{\sigma_{max}^2}{2})h(\tau-t) - 3\sigma_{max}\sqrt{h\tau-t}]}] \quad (2.4)$$

Já a Equação 2.5 estima os valores de riqueza máximos \tilde{W}_{max} da grade de riqueza:

$$\tilde{W}_{max}(t) = \max_{\tau \in \{0,1,2,\dots,T\}} [W(0)e^{[(\mu_{max} - \frac{\sigma_{max}^2}{2})ht - 3\sigma_{max}\sqrt{h\tau}]} + \sum_{t=0}^{\tau} C(t)e^{[(\mu_{max} - \frac{\sigma_{max}^2}{2})h(\tau-t) - 3\sigma_{max}\sqrt{h\tau-t}]}] \quad (2.5)$$

O estado da riqueza é definido por meio de um espaço de estados discreto, em que cada ponto é uma riqueza específica em um instante de tempo indexada por um índice $\{i \in \mathbb{Z}: i \geq 0\}$, formando assim uma "grade de riqueza" (*wealth grid*) ordenada. O menor ponto corresponde ao menor valor de riqueza possível, $W_0 = W_{min}$ e o maior ponto da grade representa a maior riqueza possível, $W_{imax} = W_{max}$. Esse espaço de estados abrange todas as riquezas capazes de serem atingidas pelo investidor com alta probabilidade considerando as carteiras possíveis.

Uma vez criada a grade de riqueza, Das et al. (2020) definem a função valor $V(W_i(T))$ apresentada na Equação 2.6, que assume valor igual a "um" quando o portfólio de um investidor atinge ao menos o valor do seu objetivo (G) dentro do tempo estipulado (T) e o valor "zero", caso contrário:

$$V(W_i(T)) = \begin{cases} 0, & \text{se } W_i(T) < G \\ 1, & \text{se } W_i(T) \geq G \end{cases} \quad (2.6)$$

Na sequência, para se calcular o valor de $V(W(t))$ em cada instante de tempo anterior, iniciando em $T - 1$ e finalizando no tempo inicial $t = 0$, é preciso determinar uma Equação de Bellman. Para tanto, Das et al. (2020) definem a função de densidade de probabilidade de se obter uma determinada riqueza W_j em um instante de tempo $t + 1$ partindo-se de uma riqueza W_i no instante anterior t investida em um determinado portfólio, que possui retorno esperado μ e uma volatilidade correspondente na fronteira eficiente σ .

Para cada um dos possíveis portfólios, a Equação 2.7 representa a função de densidade de probabilidade na qual $\phi(z)$ é o valor da função de densidade de probabilidade da variável aleatória normal padrão em Z :

$$\tilde{p}(W_j(t+1)|W_i(t), \mu) = \phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{h}}\left(\ln\left(\frac{W_j}{W_i + C(t)}\right) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})h\right)\right). \quad (2.7)$$

Dessa forma, a probabilidade de transição de um estado de riqueza para outro, de cada portfólio, é definida normalizando-se a função de densidade de probabilidade apresentada na Equação 2.7, conforme a Equação 2.8:

$$p(W_j(t+1)|W_i(t), \mu) = \frac{\tilde{p}(W_j(t+1)|W_i(t), \mu)}{\sum_{k=0}^{imax} \tilde{p}(W_k(t+1)|W_i(t), \mu)}. \quad (2.8)$$

Por fim, a Equação de Bellman é definida por Das, Ostrov et al. (2020) segundo a Equação 2.9:

$$V(W_i(T)) = \max_{\mu \in \{\mu_{min}, \mu_{max}\}} \left[\sum_{j=0}^{imax} V(W_j(t+1))p(W_j(t+1)|W_i(t), \mu) \right]. \quad (2.9)$$

Com isso, iniciando-se em $T - 1$, resolve-se a Equação 2.8 para se determinar os valores de retorno esperado $\mu_{i,T-1}$ e a Equação 2.9 para $V(W_i(T))$ para cada ponto i da grade de riqueza. Em seguida, realiza-se os cálculos novamente para cada um dos instantes anteriores de tempo

até o instante inicial $t = 0$. Por fim, o valor de $V(W(0))$ é a probabilidade ótima do investidor atingir o objetivo G a partir do montante inicial especificado por ele. Esse processo é ilustrado pela Figura 1:

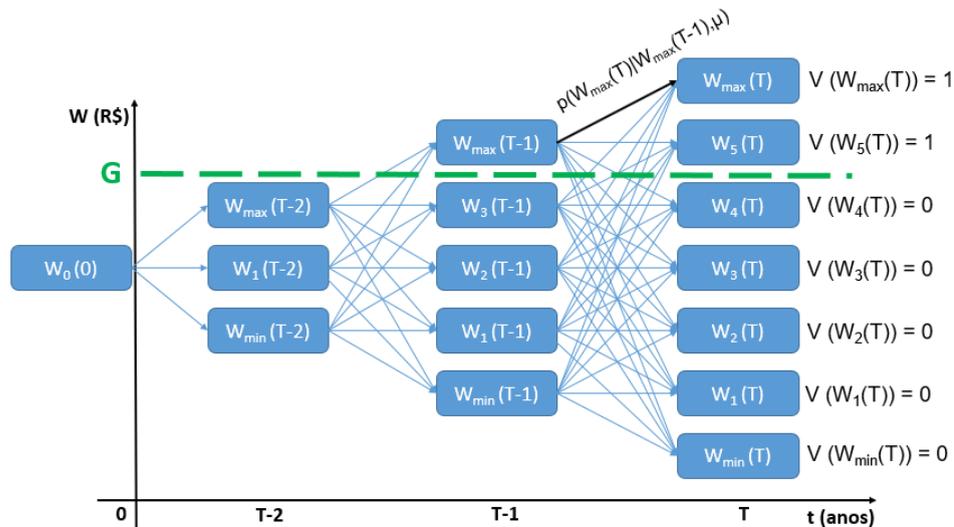


Figura 1 – Grades de Riqueza e as Probabilidades de Transição. Adaptado de Das (2021).

Regredindo-se nos instantes de tempo para determinar as probabilidades de transição de riqueza, identifica-se o caminho ótimo de alocações que maximiza a probabilidade de atingir o objetivo G . Além disso, obtém-se também os retornos esperados ótimos em cada um desses instantes ($\mu_{i,t}$) bem como as suas volatilidades ótimas ($\sigma_{i,t}$) correspondentes na fronteira eficiente.

De posse desses dados, pode-se determinar a distribuição da probabilidade de se atingir a riqueza final G cada um dos instantes de tempo futuros. Para tanto, iniciando-se em $t = 0$ com a riqueza $W(0)$ e as probabilidades de transição já calculadas, utiliza-se recursivamente a Equação 2.10 para definir a probabilidade ótima incondicional em cada instante subsequente:

$$p(W_j(t + 1)) = \sum_{i=0}^{i_{max}} p(W_j(t + 1)|W_i(t), \mu_i, t). p(W_i(t)). \quad (2.10)$$

2.2 Sobre a estimativa dos retornos esperados

A partir das equações do modelo de gestão de investimentos baseada em objetivos apresentada na seção 2.1, nota-se que o retorno esperado dos ativos tem uma importância significativa na estimativa da evolução dessa riqueza e nas probabilidades de transição de um estado de riqueza para outro. Dessa forma, é fundamental que as previsões dos retornos esperados sejam efetuadas minimizando-se erros e vieses.

Uma das dificuldades na definição do retorno esperado de um ativo ocorre por que essa variável não pode ser observada diretamente. Apenas os retornos realizados são observáveis. Portanto, para se prever retornos esperados futuros, é preciso primeiro “prever” seus valores passados. Ou seja, com base nos retornos históricos realizados, estimar os retornos esperados previstos pelos investidores no passado (Bodie, Kane & Marcus, 2014).

Dada uma série histórica de cotações de um ativo com um horizonte de tempo composto por P períodos, o valor esperado do retorno do investimento nesse ativo, é matematicamente representado pelo somatório da multiplicação entre a taxa de retorno de cada período pela sua probabilidade de ocorrência. Portanto, tratando-se cada um dos períodos observados como igualmente prováveis, a média aritmética dos retornos realizados individuais fornece uma estimativa do retorno esperado (Bodie et al., 2014).

Porém, Hughson, Stutzer e Yung (2006) destacam que a média aritmética somente resultará em uma estimativa precisa para o retorno esperado de uma ativo caso a série histórica usada para construí-la seja suficientemente longa, com algumas dezenas de anos. Ademais, Hughson et al. (2006) assim como Bodie et al. (2014) enfatizam que aumentar a frequência da série com retornos mensais ou diários não aumentam a precisão da estimativa da média aritmética, mas sim do desvio-padrão.

Além da dificuldade de se obter séries históricas longas em mercados emergentes, por exemplo, dados mais antigos podem ser menos relevantes para explicar o comportamento atual dos ativos. Adicionalmente, Jacquier et al. (2003) salientam que estimar retornos esperados com base na média aritmética dos retornos históricos e no reinvestimento de seus rendimentos (*compounding*) resulta em uma estimativa com viés ascendente ou otimista (*upward bias*). Ou seja, o retorno estimado tende a ser maior do que o retorno real.

Segundo Jacquier et al. (2003), uma alternativa para prever os retornos comumente utilizada no mercado financeiro é a média geométrica dos retornos realizados. Essa média é uma taxa de juros compostos que representa o crescimento da cotação inicial até o valor da cotação ajustada final, reinvestindo-se continuamente os retornos ao longo de todos os períodos.

Previsões baseadas na média geométrica dos retornos históricos e no reinvestimento de seus rendimentos não são enviesadas. Entretanto, isso só ocorre caso a duração da série histórica analisada seja maior ou igual ao período de investimento previsto. Caso contrário, o uso da média geométrica resulta em estimativas enviesadas para baixo, ou pessimistas (*downward bias*) (Jacquier et al., 2003).

A solução proposta por Jacquier et al. (2003) é o uso de uma composição entre as médias aritmética e geométrica, porém utilizando-se os retornos logarítmicos realizados. A composição das médias é calculada em função de dois parâmetros: a quantidade de períodos na série histórica, P , e o prazo do investimento, T .

Conforme Jacquier et al. (2003), a utilização dos logaritmos naturais dos retornos realizados se baseia na suposição de que as taxas de retorno dos ativos financeiros seguem uma distribuição lognormal. Portanto, considerando-se a cotação atual de um ativo como S_t , assume-se que o retorno logaritmo realizado em um período seja $\ln(S_t/S_{t-1})$ e possua uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 .

Dessa forma, devido à natureza da distribuição lognormal, a cotação esperada no período subsequente é estimada por $E(S_{t+1}) = S_t e^{\mu + (1/2)\sigma^2}$. E a cotação esperada para um horizonte de T períodos futuros é estimada pela Equação 2.11 (Jacquier et al., 2003):

$$E(S_{t+H}) = S_t e^{(\mu + (1/2)\sigma^2)T} . \quad (2.11)$$

Porém, os valores reais da média μ e da variância σ^2 não são conhecidos, mas sim estimados pelos estimadores $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ com base nos P períodos da série histórica. Portanto, estão sujeitos a erros de amostragem. Por essa razão, Jacquier et al. (2003) indicam que a estimativa da Equação 2.11 é enviesada positivamente por ser uma função não linear da média μ dos retornos logarítmicos passados.

Para compensar as estimativas enviesadas, Jacquier et al. (2003) propõem um “estimador modificado” para a média μ conforme a Equação 2.12:

$$\text{Estimador} = \hat{\mu} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 - \left[\frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \left(\frac{T}{P} \right) \right], \quad (2.12)$$

sendo o termo $\hat{\mu}$ definido pela média geométrica dos retornos logarítmicos realizados ao longo de P .

3. DADOS E MÉTODO

O presente artigo implementa um algoritmo em linguagem de programação Python com base no modelo de GBWM proposto por Das et al. (2020) para a construção de portfólios aderentes a objetivos financeiros. O algoritmo implementado trata cada objetivo como independente, ou seja, para cada objetivo, ele sugere uma carteira de ativos no momento do aporte inicial ($t = 0$) e também em cada tempo entre $t = 1$ até $T - 1$ de forma a maximizar a probabilidade de se atingir o montante financeiro almejado G , sendo T o número de períodos até o prazo estipulado.

Portanto, a cada instante de tempo discreto, o algoritmo resolve alocações nos ativos maximizando a função de otimização descrita na Equação 2.1. A alocação é dinâmica no sentido de que diferentes carteiras podem ser selecionadas durante a janela de investimento. Além disso, em cada instante discreto, é possível realizar movimentações financeiras $C(t)$. Caso a movimentação seja um aporte financeiro, tem-se $C(t) > 0$, já em caso de retirada, tem-se $C(t) < 0$. Assume-se que o investidor conhece a priori essas movimentações futuras no momento do aporte inicial.

Inicialmente, as equações descritas na Seção 2.1 foram traduzidas em códigos de programação em linguagem Python. Na sequência, utilizou-se os mesmos dados do artigo de Das et al. (2020) para validar o algoritmo desenvolvido.

Depois, selecionou-se três ativos para a aquisição de séries históricas. Inspirando-se nos ativos escolhidos por Das et al. (2020), o primeiro ativo escolhido é um fundo de índice que representa ações brasileiras: BOVA11 - iShares Ibovespa Fundo de Índice. O segundo ativo é um fundo de índice que representa ações americanas: IVVB11- iShares S&P 500 Fundo de Investimento em Cotas de Fundo de Índice (BlackRock, 2022).

As séries históricas dos dois fundos de índice foram construídas com base no Valor Patrimonial Líquido diário de cada cota disponibilizado no endereço eletrônico da empresa gestora ambos os fundos (BlackRock, 2022). Os arquivos dos fundos foram salvos em formato “.csv” e importados como *dataframes* utilizando a biblioteca Pandas (McKinney, 2010).

Por fim, o terceiro ativo foi criado para replicar o Certificado de Depósito Interbancário - CDI obtendo-se os retornos diários do CDI disponíveis pelo Banco Central do Brasil (2022), que

simboliza um ativo brasileiro de renda fixa de baixo risco. A data inicial da série histórica dos três ativos tem início no dia da cotação mais antiga disponível para o fundo mais recente, neste caso o dia 29/04/2014 relativo ao fundo IVVB11.

As características dos quatro testes realizados são exibidas na Tabela 1. Inicialmente, analisa-se o período passado de P anos entre o dia 29/04/2014 e a data da alocação inicial de cada teste. Ao longo desse período, calcula-se os retornos esperados e o modelo de risco (matriz de covariância) conforme indicado na tabela.

| | Teste 1 | Teste 2 | Teste 3 | Teste 4 |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Prazo do objetivo (anos): T | 04 | 04 | 02 | 02 |
| Data da alocação inicial | 29/04/2018 | 29/04/2018 | 29/04/2020 | 29/04/2020 |
| Data da liquidação final | 29/04/2022 | 29/04/2022 | 29/04/2022 | 29/04/2022 |
| Montante inicial investido: W_0 | R\$40.000,00 | R\$40.000,00 | R\$40.000,00 | R\$40.000,00 |
| Montante final almejado: G | R\$65.000,00 | R\$65.000,00 | R\$50.000,00 | R\$50.000,00 |
| Investimentos periódicos: $C(t)$ | Não | Não | Não | Não |
| Rebalanceamentos periódicos: h | Anual | Anual | Anual | Anual |
| Cálculo do retorno esperado: μ | Média Aritmética | Estimador | Média Aritmética | Estimador |
| Modelo de risco: Σ | Matriz de covariância amostral |
| Período passado analisado inicial (anos): P | 04 | 04 | 06 | 06 |

Tabela 1 – Dados dos Testes Realizados

Na sequência, executa-se o algoritmo GBWM para determinar um ponto na fronteira eficiente que representa uma carteira de ativos a ser investida no instante inicial e a sua respectiva probabilidade de atingir o objetivo do teste ao longo do prazo estipulado. Esse ponto é definido por um retorno requerido e um risco requerido (desvio-padrão) no plano risco/retorno.

A combinação de ativos e seus respectivos pesos que correspondem a esse ponto inicial específico é determinada por meio do modelo de otimização clássico apresentado por Markowitz (1952). Para tanto, utiliza-se o método “*efficient_return*” da biblioteca PyPortfolioOpt (Martin, 2021), que calcula os pesos dos ativos de forma a minimizar a volatilidade para um retorno especificado. Com a carteira inicial definida, calcula-se o seu respectivo retorno e risco esperados.

Por fim, adiciona-se, de um a um, os períodos de um ano de série histórica ao período de análise e recalcula-se todas as variáveis considerando o novo cenário de mercado e o novo prazo que resta para o fim o objetivo.

4. RESULTADOS E ANÁLISES

O detalhamento da evolução das variáveis ao longo do Teste 1 e do Teste 2 é apresentado na Tabela 2. Os resultados do Teste 1 do Teste 2 indicam que ambas estratégias resultaram no cumprimento do objetivo proposto. Entretanto, a discrepância nas projeções do retorno esperado pela média aritmética e pelo estimador modificado levaram a montantes finais significativamente diferentes.

Além disso, nota-se que para o Teste 1, o objetivo foi atingido ao final do segundo ano, enquanto para o Teste 2, isso ocorre somente no último ano do prazo estipulado. A diferença nos resultados deve-se principalmente aos pesos alocados ao ativo CDI nos dois primeiros anos das simulações.

Por consequência, no Teste 1, a carteira sugerida nos dois períodos iniciais foi mais arriscada do que no Teste 2. Essa característica é identificada tanto pelo maior risco esperado da carteira quanto pela menor probabilidade estimada para se atingir o montante final.

| Teste | Variável | 29/04/2018 | 29/04/2019 | 28/04/2020 | 28/04/2021 | 28/04/2022 |
|--------------------------------|------------------------------|------------|------------|------------------|------------|------------------|
| Teste 1 Média Aritmética | Montante Financeiro (R\$) | 40.000,00 | 47.886,54 | 71.094,76 | 81.229,85 | 99.355,71 |
| | Probabilidade | 87,55% | 90,06% | 100,00% | 100,00% | - |
| | Retorno Requerido | 16,15% | 15,73% | 8,32% | 7,55% | - |
| | Risco Requerido | 11,13% | 9,94% | 0,26% | 0,28% | - |
| | Retorno Esperado iBovespa | 12,20% | 12,02% | 9,21% | 12,33% | 10,00% |
| | Peso iBovespa | 0,00% | 1,06% | 0,00% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado S&P 500 | 19,93% | 20,90% | 23,43% | 26,06% | 23,42% |
| | Peso S&P 500 | 64,62% | 56,86% | 0,00% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado CDI | 9,33% | 8,83% | 8,32% | 7,55% | 7,48% |
| | Peso CDI | 35,38% | 42,08% | 100,00% | 100,00% | - |
| | Retorno Esperado Carteira | 16,18% | 15,73% | 8,32% | 7,55% | - |
| | Risco Esperado Carteira | 11,13% | 9,94% | 0,26% | 0,28% | - |
| | Retorno Realizado no Período | - | 19,72% | 48,47% | 14,26% | 22,31% |
| Teste 2 Estimador | Montante Financeiro (R\$) | 40.000,00 | 45.495,01 | 50.883,80 | 61.098,21 | 79.949,47 |
| | Probabilidade | 94,99% | 100,00% | 100,00% | 100,00% | - |
| | Retorno Requerido | 15,75% | 13,40% | 15,98% | 18,29% | - |
| | Risco Requerido | 6,19% | 0,25% | 0,86% | 1,44% | - |
| | Retorno Esperado iBovespa | 13,48% | 16,50% | 11,69% | 23,33% | 20,43% |
| | Peso iBovespa | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado S&P 500 | 23,09% | 30,56% | 41,76% | 55,01% | 53,38% |
| | Peso S&P 500 | 35,78% | 0,00% | 4,21% | 7,14% | - |
| | Retorno Esperado CDI | 11,67% | 13,40% | 14,85% | 15,46% | 17,45% |
| | Peso CDI | 64,22% | 100,00% | 95,79% | 92,86% | - |
| | Retorno Esperado Carteira | 15,76% | 13,40% | 15,98% | 18,29% | 20,01% |
| | Risco Esperado Carteira | 6,19% | 0,25% | 0,86% | 1,44% | - |
| | Retorno Realizado no Período | - | 13,74% | 11,84% | 20,07% | 30,85% |

Tabela 2 – Evolução das variáveis ao longo do Teste 1 e Teste 2

O detalhamento da evolução das variáveis ao longo do Teste 3 e do Teste 4 é apresentado na Tabela 3. Assim como nos dois testes anteriores, o objetivo proposto foi cumprido nos dois cenários. Porém, no Teste 3, com retorno esperado estimado pela média aritmética, novamente o montante almejado foi atingido antes do prazo devido ao menor percentual alocado no ativo CDI no primeiro ano das simulações.

Nota-se que, ainda que nos dois últimos testes o período passado de análise das séries históricas dos ativos seja dois anos maior, os retornos esperados dos ativos foram maiores com o estimador modificado do que com a média aritmética.

Além disso, percebe-se em todos os quatro testes que, conforme o montante financeiro se aproxima da meta almejada, o percentual investido em renda fixa (ativo CDI) aumenta.

Conseqüentemente, a carteira sugerida possui um risco (desvio-padrão) significativamente menor.

| Teste | Variável | 28/04/2020 | 28/04/2021 | 28/04/2022 |
|--------------------------------|---------------------------|------------|------------------|------------------|
| Teste 3 Média Aritmética | Montante Financeiro (R\$) | 40.000,00 | 53.710,70 | 58.755,75 |
| | Probabilidade | 81,75% | 100,00% | - |
| | Retorno Requerido | 20,20% | 7,55% | - |
| | Risco Requerido | 15,30% | 0,28% | - |
| | Retorno Esperado iBovespa | 9,44% | 12,23% | 9,79% |
| | Peso iBovespa | 0,00% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado S&P 500 | 23,43% | 26,05% | 22,93% |
| | Peso S&P 500 | 78,81% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado CDI | 8,32% | 7,55% | 7,49% |
| | Peso CDI | 21,19% | 100,00% | - |
| | Retorno Esperado Carteira | 20,23% | 7,55% | 7,49% |
| | Risco Esperado Carteira | 15,30% | 0,28% | - |
| Retorno Realizado no Período | - | 34,28% | 9,39% | |
| Teste 4 Estimador | Montante Financeiro (R\$) | 40.000,00 | 49.552,32 | 54.206,77 |
| | Probabilidade | 88,33% | 100,00% | - |
| | Retorno Requerido | 18,49% | 10,06% | - |
| | Risco Requerido | 10,38% | 0,28% | - |
| | Retorno Esperado iBovespa | 8,19% | 15,02% | 12,99% |
| | Peso iBovespa | 0,00% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado S&P 500 | 26,21% | 33,95% | 31,75% |
| | Peso S&P 500 | 53,31% | 0,00% | - |
| | Retorno Esperado CDI | 9,67% | 10,06% | 11,33% |
| | Peso CDI | 46,69% | 100,00% | - |
| | Retorno Esperado Carteira | 18,49% | 10,06% | 11,33% |
| | Risco Esperado Carteira | 10,38% | 0,28% | - |
| Retorno Realizado no Período | - | 23,88% | 9,39% | |

Tabela 3 – Evolução das variáveis ao longo do Teste 3 e Teste 4

CONCLUSÃO

Por meio do modelo de GBWM estático, os investidores se beneficiam não apenas de aconselhamento individualizado, mas também de notarem explicitamente os efeitos das suas escolhas sobre a probabilidade de seus resultados. Ademais, Das et al. (2018) destacam que esse modelo proporciona uma experiência mais intuitiva, transparente e compreensível para os investidores, tanto na configuração inicial de seu investimento quanto nas tomadas de decisões posteriores à medida que as condições do mercado evoluem.

Outro destaque desse modelo é a maximização do valor utilitário esperado ao longo do tempo, bem como a utilidade esperada da riqueza final. Com isso, à medida que os mercados oscilam ao longo do prazo de investimento, o portfólio é reequilibrado maximizando-se a probabilidade de atingir a riqueza alvo, ou seja, minimizando-se a volatilidade esperada (Das et al., 2020).

O presente artigo pretendeu analisar por meio de simulações os impactos das estimativas de retornos esperados nos valores da riqueza acumulada ao longo do horizonte de investimento e

na probabilidade de se atingir o objetivo financeiro. Os resultados obtidos neste artigo indicam que o método de estimativa do retorno esperado tem impacto significativo nessas duas variáveis. Entretanto, diferente do que foi indicado por Jacquier et al. (2003), o estimador modificado do retorno esperado não gerou estimativas menos otimistas que a média aritmética dos retornos históricos. Porém, as carteiras sugeridas fazendo-se uso desse estimador contiveram um maior percentual de renda fixa nos anos iniciais das simulações.

REFERÊNCIAS

- Banco Central do Brasil (2022). SGS - Sistema Gerenciador de Séries Temporais - v2.1. Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries>
- BlackRock, Inc (2022). Lista de Produtos. Disponível em: <https://www.blackrock.com/br/products/product-list#>
- Bodie Z., Kane A., & Marcus A. J. (2014). *Investments* (10th ed.). Irwin.
- Brunel, Jean L.P. (2011). Goal-Based Wealth Management in Practice. *The Journal of Wealth Management* 14.3, pp. 17–26. ISSN: 1534-7524. DOI: 10.3905/jwm.2011.14.3.017
- Das, Sanjiv R (2021). Research Webinar on Goals-Based Wealth Management. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=An054OfUE2s>
- Das, S., Markowitz, H., Scheid, J., & Statman, M. (2010). Portfolio Optimization with Mental Accounts. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45(2), 311-334. doi:10.1017/S0022109010000141
- Das, Sanjiv Ranjan and Ostrov, Daniel N and Radhakrishnan, Anand and Srivastav, Deep, A New Approach to Goals-Based Wealth Management (February 4, 2018). Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3117765> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3117765>
- Das, S.R., Ostrov, D., Radhakrishnan, A. et al. Dynamic portfolio allocation in goals-based wealth management. *Computational Management Science*, 17, 613–640 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10287-019-00351-7>
- de Nard, G. (2020). Oops! I Shrank the Sample Covariance Matrix Again: Blockbuster Meets Shrinkage. *Journal of Financial Econometrics*, 20(4), 569–611. <https://doi.org/10.1093/jfinec/nbaa020>
- Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais, Associação Brasileira das (2021). Raio X do Investidor Brasileiro - 4ª Edição. Acessado em 21.03.2022. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2021.htm.
- Fama, Eugene F. (1965). Random Walks in Stock Market Prices. *Financial Analysts Journal* 21.5, pp. 55–59. ISSN: 0015198X.
- Hughson, E., Stutzer, M., & Yung, C. (2006). The Misuse of Expected Returns. *Financial Analysts Journal*, 62(6), 88–96. <http://www.jstor.org/stable/4480793>
- K.-H. Chang, M. N. Young, & J. F. T. Diaz. (2018). Portfolio Optimization Utilizing the Framework of Behavioral Portfolio Theory. *International Journal of Operations Research (Online)*, 15(1), 1–13.
- Kahneman, Daniel e Amos Tversky (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making*. Cap. Chapter 6, pp. 99–127. DOI: 10.1142/9789814417358_0006.

- Kent, Daniel, David Hirshleifer e Siew Hong Teoh (2002). Investor psychology in capital markets: evidence and policy implications. *Journal of Monetary Economics* 49.1, pp. 139–209. ISSN: 0304-3932. DOI: [https://doi.org/10.1016/S03043932\(01\)00091-5](https://doi.org/10.1016/S03043932(01)00091-5).
- Jacquier, E., Kane, A., & Marcus, A. J. (2003). Geometric or Arithmetic Mean: A Reconsideration. *Financial Analysts Journal*, 59(6), 46–53. <http://www.jstor.org/stable/4480527>
- Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110–119. DOI: 10.3905/jpm.2004.110
- Markowitz, Harry (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance* 7.1, pp. 77–91.
- Martin, R. A., (2021). PyPortfolioOpt: portfolio optimization in Python. *Journal of Open Source Software*, 6(61), 3066, <https://doi.org/10.21105/joss.03066>
- McKinney, W. (2010). Data Structures for Statistical Computing in Python. *Proceedings of the Python in Science Conference*. <https://doi.org/10.25080/majora-92bf1922-00a>
- Miller, Merton H. e Franco Modigliani (1961). Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares. *The Journal of Business* 34.4, pp. 411–433. ISSN: 00219398, 15375374. <http://www.jstor.org/stable/2351143>.
- Nevins, Daniel (2004). Goals-Based Investing. *The Journal of Wealth Management* 6.4, pp. 8–23. ISSN: 1534-7524. DOI: 10.3905/jwm.2004.391053.
- Sharpe, William F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance* 19.3, pp. 425–442. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>.
- Shefrin, Hersh e Meir Statman (1985). The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence. *The Journal of Finance* 40.3, pp. 777–790. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1985.tb05002.x.
- Shefrin, Hersh e Meir Statman (2000). Behavioral Portfolio Theory. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 35.2, pp. 127–151. DOI: 10.2307/2676187.
- Statman, Meir (2008). What Is Behavioral Finance?. *Handbook of Finance*. American Cancer Society. Chap. 9. ISBN: 9780470404324. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470404324.hof002009>.
- Thaler, Richard H. (1999). Mental accounting matters. *Journal of Behavioral Decision Making* 12.3, pp. 183–206. DOI: 10.1002/(SICI)1099-0771(199909)12:3<183::AID-BDM318>3.0.CO;2-F.